

THÉORIE DES GROUPES 2024 - 25, SOLUTIONS 7

Exercice 1. À faire vous-même.

Exercice 2. D'après le théorème de correspondance, les sous-groupes normaux de G contenant H sont en bijection avec les sous-groupes normaux de G/H . Cela prouve les deux implications de l'énoncé.

Exercice 3. Une série de composition est donnée par

$$0 = 12\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \trianglelefteq 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \trianglelefteq 3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

avec comme facteurs de composition

$$\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}.$$

La série de composition n'est pas unique, voici par exemple une autre

$$0 = 12\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \trianglelefteq 6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \trianglelefteq 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}.$$

Elles ont les mêmes facteurs de composition d'après un théorème du cours.

Exercice 4. Soit $V_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ le groupe de Klein. Remarquons qu'il est précisément le sous-groupe de A_4 formé des éléments d'ordre 2. Puisque pour tout $\sigma \in A_4$ et $x \in V_4$, on a $(\sigma x \sigma^{-1})^2 = 1$, cela prouve que $\sigma x \sigma^{-1}$ a pour ordre 2 et appartient donc à V_4 . Ceci montre que V_4 est normal dans A_4 . Il en résulte que

$$0 \trianglelefteq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle (12)(34) \rangle \trianglelefteq V_4 \trianglelefteq A_4$$

est une série de composition. Les facteurs de composition sont

$$\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$$

car ce sont les seuls groupes ayant les cardinalités requises. Puisque $A_4 \trianglelefteq S_4$ est normal, nous pouvons l'étendre en une série de composition

$$0 \trianglelefteq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle (12)(34) \rangle \trianglelefteq V_4 \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$$

avec comme facteurs de composition

$$\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$

Exercice 5. Par les propriétés des produits semi-directs, on a une courte suite exacte

$$1 \rightarrow G \rightarrow G \rtimes_{\varphi} H \rightarrow H \rightarrow 1.$$

Il en résulte de la proposition 22 des notes que les facteurs de composition de $G \rtimes_{\varphi} H$ sont simplement les facteurs de composition de G et les facteurs de composition de H .

Exercice 6. (1) Par l'exercice 5 de la semaine dernière, nous savons que l'on peut écrire

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2^{a_2}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k^{a_k}\mathbb{Z}.$$

Ainsi, une série de composition est donnée par

$$0 \trianglelefteq \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}/p_1^2\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}/p_1^3\mathbb{Z} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z} \trianglelefteq \\ \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2^2\mathbb{Z} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq \mathbb{Z}/p_1^{a_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2^{a_2}\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k^{a_k}\mathbb{Z}$$

qui a pour longueur $a_1 + a_2 + \dots + a_k$. Les facteurs de composition consistent en a_i fois $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la proposition 19 du cours, nous savons que $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a une série de composition

$$0 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_k = G.$$

Puisque G est abélien, il en est de même de ses sous-groupes. Par conséquent, les facteurs de composition G_{i+1}/G_i sont des groupes finis simples abéliens, c'est-à-dire qu'ils sont cycliques d'ordre premier (comme expliqué dans le cours). Il en résulte que

$$n = |G| = |G/G_{k-1}| \times |G_{k-1}| = |G/G_{k-1}| \times |G_{k-1}/G_{k-2}| \times |G_{k-2}| \\ = \prod_{i=0}^{k-1} |G_{i+1}/G_i|$$

qui est un produit de nombres premiers. Par le théorème de Jordan-Hölder, les facteurs de composition G_{i+1}/G_i sont uniques (à permutation près), ce qui montre qu'une telle décomposition de n en produit de nombres premiers est unique.

Exercice 7. D'après l'exercice 7 de la série 4, nous avons un isomorphisme

$$D_{2n} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On obtient donc une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow D_{2n} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

et ainsi, d'après le cours, nous savons que D_{2n} a une série de composition obtenue en attachant une série de composition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec celle de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'exercice précédent nous donne de telles séries de composition. De plus, l'exercice 5 nous indique que les facteurs de composition sont l'union des facteurs de ces deux groupes.

Exercice 8. Supposons par l'absurde qu'il existe un sous-groupe normal propre $H \trianglelefteq G$. Alors, en posant $G_0 := 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G_n \subseteq H$ et $G_{n+1} \not\subseteq H$. Cependant, on a alors que $G_{n+1} \cap H$ est un sous-groupe normal propre de G_{n+1} , ce qui contredit l'hypothèse. Considérons les inclusions $A_5 \subsetneq A_6 \subsetneq \dots$ des groupes alternés, tous simples. Alors

$$\bar{A} = \bigcup_{i=5}^{\infty} A_i$$

est infini et simple.

Exercice 9. (1) Voir la preuve des propositions 20, 21, 22 et du théorème de Jordan-Hölder.

(2) On a une suite exacte courte

$$1 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow G/K \rightarrow 1$$

D'après le point précédent

$$\text{longueur}(G) = \text{longueur}(K) + \text{longueur}(G/K),$$

mais comme K est un sous-groupe propre de G , G/K n'est pas trivial et a donc une longueur strictement supérieure à 0. Cela implique que $\text{longueur}(G) > \text{longueur}(K)$.

(3) Si l'on a une chaîne stricte

$$1 \trianglelefteq G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \dots$$

composée de sous-groupes normaux de G , on peut appliquer (2) pour obtenir

$$0 < \text{longueur}(G_0) < \text{longueur}(G_1) < \dots$$

Ainsi, toute chaîne de ce type doit être finie et avoir une longueur au plus égale à $\text{longueur}(G) + 1$.

(4) Prouvons chacune des deux implications :

" \implies " Observons que le raisonnement de (3) reste valable, même si les chaînes décrites en (a) et (b) ne sont pas constituées de sous-groupes normaux de G .

" \impliedby " Clairement, G est normal dans G . Si G est simple, nous avons terminé. Sinon, choisissons un sous-groupe normal $H_0 \trianglelefteq G$. Si H_0 est maximal dans G , on s'arrête. Sinon, on continue en itérant ce processus en choisissant à chaque étape un sous-groupe normal H_i de G tel que $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ avec inclusion stricte. Par l'hypothèse (b), ce processus doit se terminer pour un certain H_n , où n est un entier positif. Posons $G_1 = H_n \trianglelefteq G$. On peut vérifier que G_1 est maximal dans G , sinon le processus ci-dessus n'aurait pas terminé. Observons que G_1 est également normal dans G , par construction. On peut donc appliquer de manière inductive le même raisonnement pour obtenir une chaîne normale descendante dans laquelle chaque inclusion est maximale de la forme suivante

$$G \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots$$

Par l'hypothèse (a), une telle chaîne doit se stabiliser pour un certain G_n , et par construction des G_i , on doit avoir $G_n = 1$. Nous avons ainsi obtenu une série de composition pour G , donc G est de longueur finie.